Mécanique céleste et satellites – Fiche de cours

1. Accélération d'un satellite

1.1 Champ de gravitation créé par un astre

Soit un astre de masse M, à symétrie sphérique, assimilé à un point matériel placé en son centre de masse O.

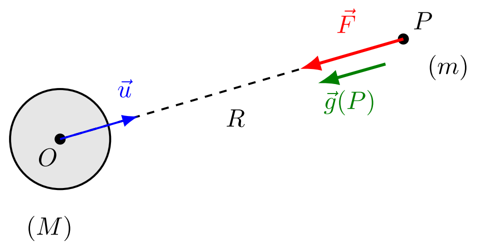
Un point matériel P de masse m, situé à la distance $R = OP$ du centre de l'astre, subit de la part de cet astre une force gravitationnelle attractive.

Propriété : La force gravitationnelle exercée par l'astre sur l'objet est :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}$$

où :

- $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
- R est la distance entre les centres
- $\vec{u}$ est un vecteur unitaire radial



1.2 Champ gravitationnel

Le champ gravitationnel créé par l'astre au point P est noté $\vec{g}(P)$.

Définition : Le champ gravitationnel est relié à la force gravitationnelle par :

$$\vec{F} = m\vec{g}(P)$$

Propriété : L'expression du champ gravitationnel au point P est donc :

$$\boxed{\vec{g}(P) = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}}$$

1.2 Accélération d'un satellite

Un satellite est un système en mouvement autour d'un astre attracteur sous l'effet du champ gravitationnel créé par celui-ci.

Dans le référentiel d'étude, on applique la deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

or $\vec{F} = m\vec{g}(P)$, donc :

$$\vec{a} = \vec{g}(P)$$

Propriété : L'accélération du satellite est :

$$\boxed{\vec{a} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}}$$

Elle est radiale et centripète (dirigée vers le centre de l'astre).

L'accélération devient alors :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$$

2. Satellite en mouvement circulaire

2.1 Utilisation du repère de Frenet

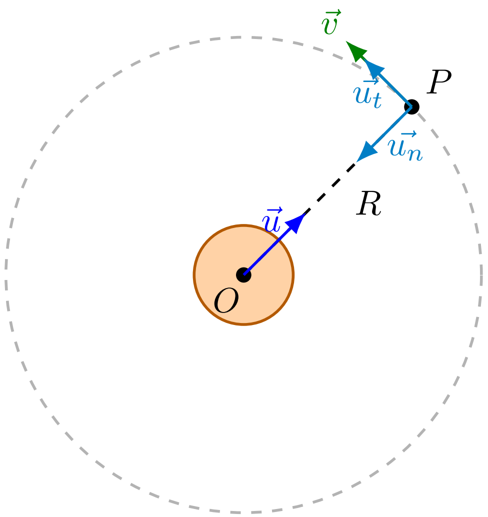
Soit un satellite en mouvement circulaire autour du centre O de l'astre attracteur de masse M.

La distance $R = OP$ est constante.

On utilise le repère de Frenet :

— $\vec{u_t}$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire

— $\vec{u_n}$: vecteur unitaire normal dirigé vers le centre



En notant $v(t)$ la vitesse du satellite, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$$

2.2 Mouvement circulaire uniforme

Pour un mouvement circulaire uniforme, la valeur de la vitesse est constante, donc :

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Or, d'après l'étude gravitationnelle précédente :

$$\vec{a} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}$$

Comme $\vec{u_n}$ et $-\vec{u}$ ont même sens, on identifie les normes :

$$\frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2}$$

2.3 Vitesse d'un satellite

On en déduit :

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

Propriété : La vitesse d'un satellite en orbite circulaire est :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

2.4 Période de révolution

La période de révolution T d'un satellite est la durée qu'il met pour effectuer un tour complet autour de l'astre attracteur.

Pour un mouvement circulaire de rayon R, la distance parcourue en un tour est le périmètre du grand cercle :

$$2\pi R$$

Comme la vitesse est constante :

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

En remplaçant v par $\sqrt{\frac{GM}{R}}$, on obtient :

$$\frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

puis :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM}$$

Propriété : La période de révolution vérifie :

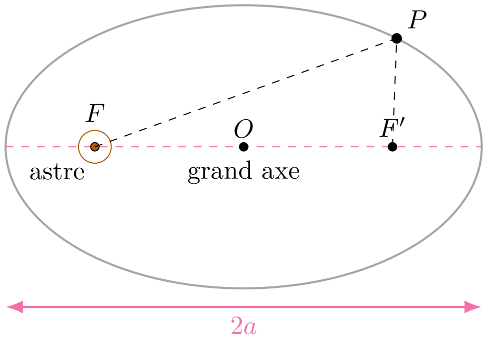
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$

Remarque : Cette relation pourra être reliée ensuite aux lois de Kepler.

3. Première loi de Kepler

3.1 Loi des orbites

Propriété : Les orbites des satellites sont des ellipses dont le centre de l'astre attracteur occupe un des foyers.



Remarque : Une orbite circulaire est un cas particulier d'ellipse.

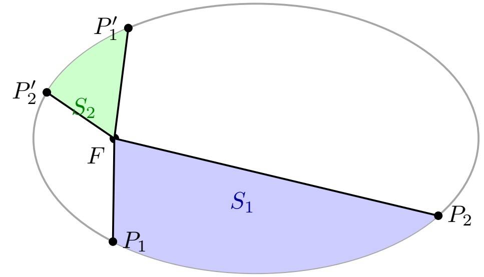
3.2 Vocabulaire

- Une ellipse possède 2 foyers, définie géométriquement comme tous les points P tel que FP +F'P=2a.
- Le centre de l'astre attracteur se trouve en un foyer.
- Le plus grand diamètre de l'ellipse est appelé **grand axe**.
- Sa moitié est le **demi-grand axe**, noté a.

3. Deuxième loi de Kepler

3.1 Loi des aires

Propriété : Le segment reliant le centre de l'astre attracteur au satellite balaie des surfaces d'aires égales pendant des durées égales.



Remarque : Cela signifie que le satellite ne se déplace pas toujours à la même vitesse sur une orbite elliptique.

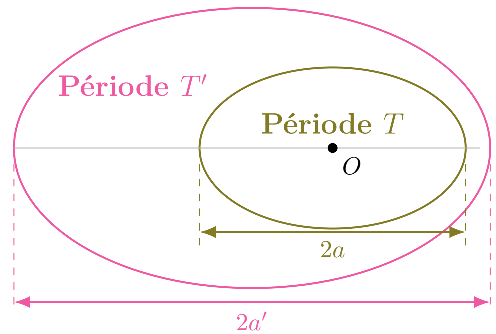
Il va plus vite lorsqu'il est proche de l'astre attracteur, et plus lentement lorsqu'il en est éloigné.

4. Troisième loi de Kepler

4.1 Loi des périodes

Propriété : Le quotient du carré de la période T de révolution d'un satellite par le cube du demi-grand axe a de son orbite est indépendant du satellite et ne dépend que de la masse M de l'astre attracteur.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = constante}$$



Remarque : Pour tous les satellites en orbite autour d'un même astre attracteur, la quantité $\dfrac{T^2}{a^3}$ est la même.

2.3 Cas particulier d'une orbite circulaire

Si l'orbite est circulaire, alors le rayon R de l'orbite joue le rôle du demi-grand axe :

$$a = R$$

On montre que la troisième loi de Kepler s'écrit aussi :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

3. Application : satellite géostationnaire

3.1 Définition

Propriété : Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel de la Terre fixe dans le référentiel terrestre.

3.2 Conditions

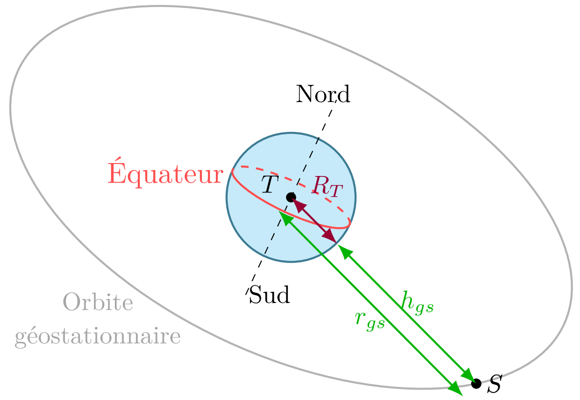
Pour qu'un satellite soit géostationnaire :

— son orbite doit être circulaire ;

— son orbite doit être dans le plan de l'équateur ;

— sa période doit être égale au jour sidéral :

$$T = T_{\text{sid}} = 86\,164 \text{ s}$$



2.2 Application

En appliquant la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r_{gs}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

on obtient pour l'orbite géostationnaire :

$$r_{gs} \approx 4{,}2 \times 10^7 \text{ m}$$

et donc :

$$h_{gs} = r_{gs} - R_T \approx 3{,}6 \times 10^4 \text{ km}$$

Un satellite géostationnaire est donc situé à environ 36 000 km au-dessus de l'équateur.